
ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 8: Théorème du rang, bases et coordonnées

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) **utiliser le théorème du rang** pour calculer des dimensions de sous-espaces ;
- (O.2) **calculer les coordonnées** d'un vecteur relatives à une base.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- rang d'une application linéaire
- rang d'une matrice
- matrices ligne-équivalentes
- coordonnées



Noyau d'exercices

1.1 Théorème du rang et bases des noyaux et des images

Exercice 1 (Théorème du rang I)

- (a) Soit A une matrice de taille 5×6 . Si $\dim(\text{Ker}(A)) = 3$, quel est le rang de A ?
- (b) Soit A une matrice de taille 7×3 . Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\text{Ker}(A)$? Répondre aux mêmes questions si A est une matrice de taille 3×7 .
- (c) Soit A une matrice carrée de taille n . Donner une condition sur $\text{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.
- (d) Soit $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ une application linéaire. Si $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$, quel est le rang de T ?
- (e) Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, où $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la dimension de $\text{Ker}(T)$?

Exercice 2 (Théorème du rang II)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Donner une base pour le noyau, l'image, et le sous-espace vectoriel $\text{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A , puis vérifier l'affirmation du théorème du rang dans ce cas.

Exercice 3 (Théorème du rang III)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A .
- Même question pour A^T .
- On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?
- On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de la matrice $[A; \mathbf{b}]$ et le rang de A pour que l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soit compatible?

1.2 Bases et coordonnées

Exercice 4 (Coordonnées I)

- On considère les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

- On considère les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (Bases et coordonnées)

- Prouver que les vecteurs

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer le vecteur de coordonnées de

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

relatives à la base précédente.

- (b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{B}' = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Calculer le vecteur de coordonnées de $p = t$ relatives à la base précédente.
- (c) Soit $\mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3 . Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Compléter cette famille de quatre matrices en une base de $\mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ et calculer le vecteur de coordonnées de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

relatives à la base obtenue.

Exercice 6 (Coordonnées II)

On rappelle que $\mathbb{P}_2$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{B} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$ la base de $\mathbb{P}_2$ et $p = 1 + 4t + 7t^2$. Calculer les coordonnées de p relatives à la base $\mathcal{B}$.



Pour compléter la pratique

2.1 Preuve d'un résultat du cours

Exercice 7 (Une autre caractérisation de la notion de base)

Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille finie de n vecteurs de V . Alors, $\mathcal{B}$ est une base de V si et seulement si tout vecteur $v \in V$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

2.2 Théorème du rang et bases des noyaux et des images

Exercice 8 (Théorème du rang IV)

Rappel de la théorie

On rappelle que deux matrices sont **ligne-équivalentes** si l'on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes. En conséquence, **deux matrices sont ligne-équivalentes si et seulement si elles possèdent la même forme échelonnée réduite**.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que les matrices A et B sont ligne-équivalentes.

Indication : quelles sont les formes échelonnées réduites de ces deux matrices ?

- (b) En utilisant seulement que A et B sont ligne-équivalente et le théorème du rang, calculer le rang de A et $\dim(\text{Ker}(A))$.
- (c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\text{Img}(B)$, $\text{Ker}(B)$ et $\text{Ker}(B^T)$, ainsi que du sous-espace vectoriel $\text{Lgn}(B)$ engendré par les lignes de B .
- (d) En utilisant seulement que A et B sont ligne-équivalente et le théorème du rang, trouver une base pour chacun des sous-espaces $\text{Img}(A)$, $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(A^T)$, ainsi que du sous-espace vectoriel $\text{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A . Que remarquez-vous ? Dans quel(s) cas est-il nécessaire d'effectuer de nouveaux calculs ?

Exercice 9 (QCM sur le théorème du rang)

Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix},$$

alors

- ☐ $\text{Img}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0 ;
- ☐ $\text{Img}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0 ;
- ☐ $\text{Img}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 ;
- ☐ $\text{Img}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

(b) Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que

- ☐ $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$ et $\dim(\text{Img}(A)) \leq 4$;
- ☐ $\dim(\text{Ker}(A)) = 3$ et $\dim(\text{Img}(A)) = 4$;
- ☐ $\dim(\text{Ker}(A)) = 4$ et $\dim(\text{Img}(A)) \leq 2$;
- ☐ $\dim(\text{Ker}(A)) = 5$ et $\dim(\text{Img}(A)) = 2$.

(c) Si A est une matrice inversible de taille 5, alors

- ☐ les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$;
- ☐ les lignes de A sont linéairement indépendantes ;
- ☐ le noyau de A est vide ;
- ☐ le rang de A est strictement plus petit que 5.

(d) La matrice qui représente une application linéaire $T : \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de taille

- ☐ 3×3 ; ☐ 3×9 ; ☐ 3×6 ; ☐ 9×3 .

(e) Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$. Alors,

- ☐ T n'est pas une application linéaire ;
- ☐ $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ et $\dim(\text{Im}(T)) = 2$;
- ☐ $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ et $\dim(\text{Im}(T)) = 1$;
- ☐ $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ et $\dim(\text{Im}(T)) = 1$.

(f) Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$. Alors, une base du noyau de T est donnée par

- ☐ $\{t\}$; ☐ $\{t, 3+t^2\}$; ☐ $\{-2+t+3t^2, 2-3t^2\}$; ☐ $\{2-3t^2\}$.

2.3 Bases et coordonnées

Exercice 10 (QCM sur bases et coordonnées)

Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) L'ensemble

$$V = \{A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ est inversible}\}$$

- ☐ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2 ;
- ☐ est un espace vectoriel pour la somme et le produit par scalaires usuels de matrices ;
- ☐ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$;
- ☐ est le noyau d'une application linéaire $T : \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) Étant donné la base canonique

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

alors le vecteur de coordonnées $[A]_{\mathcal{B}}$ de A relatives à la base $\mathcal{B}$ est

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) La famille suivante est une base de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$\square \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\square \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\square \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\square \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$